Fonctions usuelles – Limites

I) Généralités

- Dans tout ce cours, I désignera un intervalle de ℝ (intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert…).

- Si I = [a, b], on appellera I un segment de ℝ.

- On considère la fonction *f* allant de I dans ℝ telle que pour tout *x* de I, il existe un unique réel *y* tel que y = f(x).

- On appelle graphe de *f* et on note C_f les couples (x, f(x)) quand *x* parcours I.

- On appelle domaine de définition de *f* l'ensemble noté D_f qui représente l'ensemble de *x* de I tel que f(x) ∈ ℝ.

II) Limites de fonction

1) Définition

- Soit *f* une fonction de I dans ℝ et a ∈ I et l ∈ ℝ.
  On dit que *f* admet une limite *l* quand *x* tends vers *a* si :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I, \\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon\end{array}}$$

On écrira :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l}$$

Remarque :

$$\boxed{\begin{array}{l} |x-a|\le \alpha \Leftrightarrow a-\alpha \le x \le a+\alpha \\ |x-a|\le \alpha \Leftrightarrow x\in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[\end{array}}$$

2) Propriétés des limites

- Lemme :

  Soit *f* une fonction de I dans ℝ et a ∈ ℝ.
  - Si la limite de f(x) quand *x* tend vers *a* existe alors elle est unique.
  - Si pour tout *x* de I, f(x) est positif ou nul et si la limite de f(x) quand *x* tend vers *a* existe alors la limite de f(x) est positive ou nulle.
  - Si la limite de f(x) quand *x* tend vers *a* existe et est non nulle alors il existe un α > 0 tel que pour tout *x* de]a – α, a + α[entraîne que f(x) ≠ 0.

  Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) \;\; existe \;\; \Rightarrow \;\; la \text{ limite } est \;\; unique \\ \begin{cases} \forall x\in I, \;\; f(x)\ge 0 \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \;\; existe \end{cases} \Rightarrow \;\; \lim\limits_{x\to a} f(x)\ge 0 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) \;\; existe \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \;\; \exists \alpha>0 / \forall x\in \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, \; f(x)\ne 0 \end{array}}$$

  (Démonstrations par l’absurde)

- Corollaire :

  Soit *f* une fonction de I dans ℝ et a ∈ I tel que la limite de f(x) quand *x* tend vers *a* soit non nulle alors la fonction 1/f(x) est bien définie sur]a – α, a + α[

- Définition :

Soit *f* une fonction de I dans ℝ et a ∈ I.
On dit que *f* est continue en *a* si et seulement si la limite de f(x) quand *x* tends vers *a* existe et vaut f(a).

$$\boxed{\text{f continue en a } \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

- Théorème d'encadrement (des gendarmes) :

Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions et a ∈ I.
On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors la limite de g(x) quand *x* tend vers *a* existe et vaut $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$

- Remarque :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ n'existe pas} \Leftrightarrow \begin{cases} l = \pm\infty \\ \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x \in I \\ |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon \end{cases}}$$

Il existe aussi une autre méthode pour montrer qu'une limite n'existe pas.
Il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) telles que :

– $x_n \neq y_n$ pour tout n ∈ ℕ

– $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$

– $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) \neq \lim\limits_{y_n \to a} f(y_n)$

- Définition :

Soit *f* une fonction de I dans ℝ et a ∈ I.

– On dit que *f* admet une limite à gauche de *a* :

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall x \in I,\ a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon}$$

– On dit que *f* admet une limite à droite de *a* :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0 / \forall x\in I,\ a<x\leq a+\alpha \Rightarrow \left|f(x)-l\right|\leq\varepsilon}$$

- Lemme :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)}$$

- Définition :
  On dit que *f* admet une limite *l* quand *x* tend vers + ∞ si :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists b>0 / \forall x>b \Rightarrow \left|f(x)-l\right|\leq\varepsilon}$$

On dit que *f* tend vers + ∞ quand *x* tends vers *a* si :

$$\boxed{\forall A>0,\ \exists\alpha>0 / \forall x\in I, \left|x-a\right|\leq\alpha \Rightarrow f(x)\geq A}$$

On dit que *f* tend vers – ∞ quand *x* tends vers + ∞ si :

$$\boxed{\forall A<0,\ \exists b>0 / \forall x>b \Rightarrow f(x)\leq A}$$

- Propriétés :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) \\
\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) \\
\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ si \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0
\end{array}}$$

III) Formes indéterminées

1) Définitions

- Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$\boxed{0\times\infty, \infty-\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}}$$

Si x tend vers a, les formes indéterminées se ramènent à 0/0

Si x tend vers ∞, les formes indéterminées se ramènent à ∞/∞

- Rappel :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a>0, \forall x\in\mathbb{R},\ a^{x}=e^{x\ln(a)} \\ \forall f(x)>0, \forall x\in I,\ \left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))} \end{array}}$$

Remarque : 1^{∞} se ramène à la forme indéterminée $0\times\infty$

Remarques :

1) Si x tend vers ∞ et si on a une forme indéterminée de la forme ∞/∞ ou 0/0 alors ce sont les croissances comparées qui nous aident.

2) Si x tend vers a et si on a une forme indéterminée de la forme 0/0 alors ce sont les propriétés fines du numérateur et du dénominateur au voisinage de a qui nous aident et la clé est la dérivée dans ce cas.

- Limites à connaître :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

- Autres limites utiles :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{1}{6}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

2) Méthodes de résolutions des FI « 0/0 » et « ∞/∞ »

- **Cas « 0 / 0 » : Première méthode**

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en a $\in$ I. Alors on a :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Cette méthode ne marche que si on a un « x » au dénominateur.

- **Cas « 0 / 0 » : Deuxième méthode**

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a $\in$ I. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{si } f'(a)\neq 0 \quad ou \quad g'(a)\neq 0}$$

- **<u>Cas « 0 / 0 » : Troisième méthode, règle de l'Hospital</u>**

Soit *f* et *g* deux fonctions de I dans ℝ dérivables en a ∈ I ainsi que toutes les dérivées de *f* et *g* au point *a*. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{si } f'(a)\neq 0 \quad ou \quad g'(a)\neq 0}$$

Si f'(a) = g'(a) = 0 alors,

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f''(a)}{g''(a)} \quad \text{si } f''(a)\neq 0 \quad ou \quad g''(a)\neq 0}$$

Si f''(a) = g''(a) = 0 alors,

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f^{(3)}(a)}{g^{(3)}(a)} \quad \text{si } f^{(3)}(a)\neq 0 \quad ou \quad g^{(3)}(a)\neq 0}$$

Et ainsi de suite…

- **<u>Cas « ∞ / ∞ »</u>**

Pour lever l'indétermination, « ∞ / ∞ » quand *x* tends vers ∞, on <u>factorise les termes dominants</u> à l'infini et on <u>simplifie</u>.
On peut aussi utiliser les <u>croissances comparées</u> des fonctions usuelles. En plus l'infini, c'est l'exponentielle qui domine les fonctions puissances qui elle-même dominent les fonctions logarithmes.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \forall n>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln(x)}=+\infty \qquad \forall n>0$$

IV) Fonctions usuelles

1) La fonction « valeur absolue »

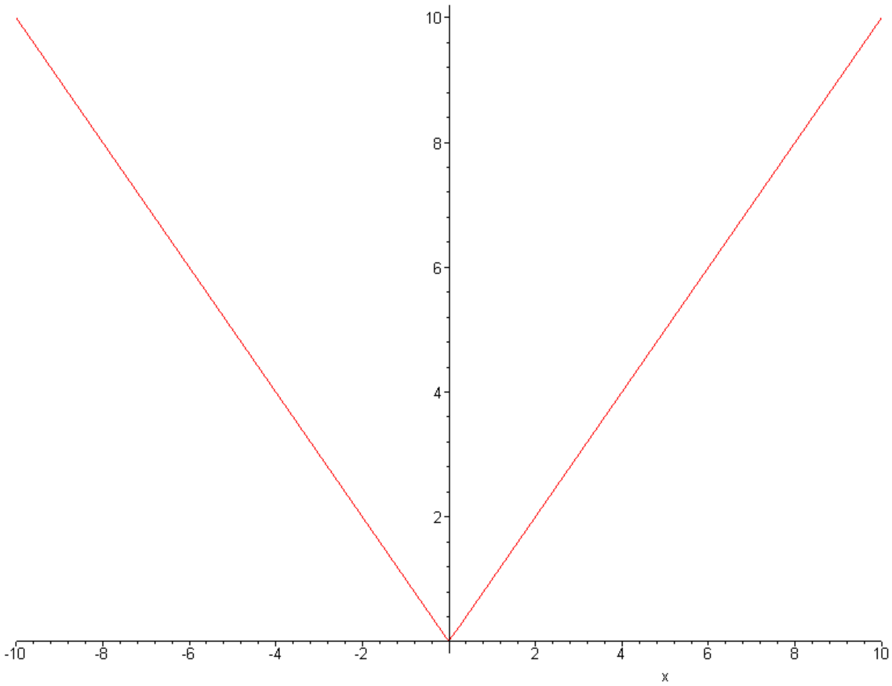
- Soit *x* un réel

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}}$$

- Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

$$\boxed{\begin{array}{l} |-x| = |x| \\ |\lambda x| = |\lambda||x| \end{array}}$$

- <u>Graphe de la fonction</u> :



2) La fonction « partie entière »

- Soit *x* un réel

$$\boxed{x = n + \alpha,\ n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \alpha < 1}$$

- On définie la fonction partie entière E(x) telle que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) = n \in \mathbb{Z}}$$

- Propriétés de E(x) :

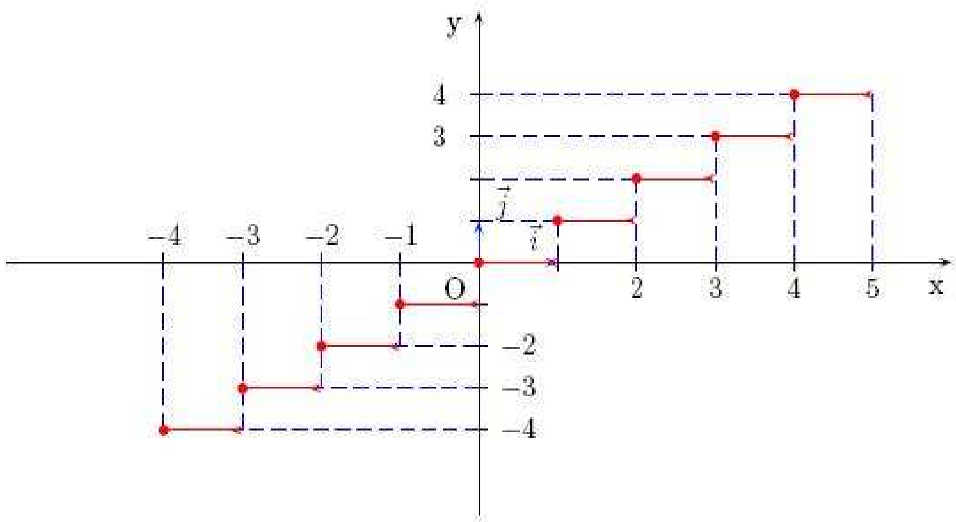
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1 \\ \forall x \in [n, n+1[,\ E(x) = n \\ \forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < E(x) \leq x \end{array}}$$

- Limites de E(x) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n - 1 \\ \lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n \end{array}}$$

- E(x) est discontinue en tout point *n* relatif.

- Graphe de la fonction :



3) La fonction « mantisse »

- On définie la fonction mantisse m(x) telle que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ m(x) = \alpha = x - E(x),\ 0 \leq \alpha = m(x) < 1}$$

- Propriétés :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ m(x+1) = m(x)}$$

m(x) est 1 – Périodique.

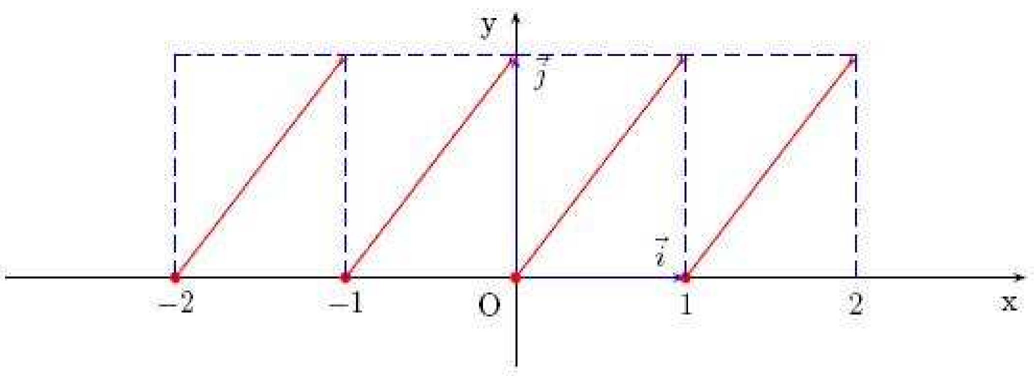
$$\boxed{\forall x \in [0,1[\,,\ m(x) = x}$$

- Limites de m(x) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to n^-} m(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to n^+} m(x) = 0 \end{array}}$$

C'est également une fonction discontinue.

- Graphe de la fonction :



4) La fonction « exponentielle » et « logarithme »

- $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} e^0 = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x.e^y \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \end{array}}$$

- La dérivée de *exp* est elle-même. Elle est donc toujours positive. Donc *exp* est une fonction strictement croissante et elle réalise une bijection de $\mathbb{R} \to]0,+\infty[$

- La fonction inverse de *exp* est *ln*. On l'obtient en faisant la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Elle est définie de $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

- $$\boxed{\begin{array}{l} \forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x \\ \forall \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x \end{array}}$$

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante car sa dérivée vaut 1/x pour tout *x* positif.

- $$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{l}\ln(1) = 0 \\ \forall (x,y) > 0,\ \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ \forall (x,y) > 0,\ \ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \\ \forall x > 0,\ \ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)\end{array}}$$

5) Les fonctions trigonométriques

- Ces fonctions ont été étudiées dans ce cours : http://www.zonegeeks.com/Documents/Cours/prepa/maths/Fonctions_usuelles1.pdf

  Pour les courbes : http://www.zonegeeks.com/Documents/Cours/prepa/maths/chap1_Fonction_usuelles1.pdf